

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кубанский государственный университет»
Факультет математики и компьютерных наук
Кафедра теории функций



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе и
инновациям

М.В. Шарафан

«25» марта 2022 г.

**Программа вступительного испытания в аспирантуру
по специальной дисциплине**

научная специальность:

1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

(шифр и наименование научной специальности)

Краснодар
2022

Программа вступительного испытания сформирована на основе федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования по программам специалитета и (или) магистратуры, Положением о подготовке кадров высшей квалификации в аспирантуре ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет»

Программу составили: Щербаков Е.А., Лазарев В.А.

Программа одобрена на заседании кафедры теории функций, протокол № 6 от «15» февраля 2022 г.

Программа одобрена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук, протокол № 4 от «16» февраля 2022 г.

Зав. отделом аспирантуры и докторантуры  Н.Ю. Звягинцева

1. Структура вступительного испытания

Вступительное испытание по специальной дисциплине состоит из двух частей: экзамена по специальной дисциплине и собеседования по предполагаемой тематике диссертационного исследования с учетом представленных публикаций или подготовленного поступающим реферата по планируемой тематике исследования.

2. Процедура проведения вступительного испытания

В первой части абитуриент рассказывает о направлении своих исследований и предполагаемой теме диссертации. Собеседование по тематике предполагаемого диссертационного исследования проводится на основе подготовленного поступающим реферата. Реферат представляется в экзаменационную комиссию в сроки и по адресам, указанным в расписании вступительных испытаний.

Во второй части оценивается теоретическая подготовленность абитуриента. Экзамен по специальной дисциплине принимается устно по билетам. Каждый билет содержит 2 вопроса. Абитуриенту предоставляется 10-15 минут на ответ.

Экзамен и собеседование проводится на русском языке.

По предварительному согласованию с абитуриентом экзамен и собеседование может проводиться дистанционно с использованием информационных технологий.

3. Содержание вступительного испытания по специальной дисциплине

1. Вещественный анализ

Понятие метрического пространства, полные метрические пространства, компактность. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Критерий компактности в \mathbf{R}^n . Полнота \mathbf{R}^n .

Понятие непрерывности функций, их свойства. Равномерная непрерывность. Свойства непрерывных функций на компактах.

Непрерывность и дифференцируемость функции нескольких переменных. Полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости.

Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.

Локальный экстремум функции многих переменных. Достаточное условие. Условный экстремум функции многих переменных. Необходимое условие. Метод множителей Лагранжа.

Криволинейные интегралы первого и второго рода, формула Грина. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Формула Гаусса-Остроградского. Формула Стокса в трехмерном пространстве.

Ортогональные системы функций. Неравенство Бесселя, условие полноты. Ряды Фурье. Достаточные условия сходимости рядов Фурье. Полнота тригонометрической системы в пространстве непрерывных функций, периодических на отрезке $[0, 2\pi]$.

Мера в смысле Лебега. Измеримые функции и их свойства. Интеграл Лебега и его основные свойства. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана.

Функциональные последовательности (ряды). Поточечная и равномерная сходимости, примеры. Свойства предельной функции (суммы ряда), ее интегрируемость и дифференцируемость.

Понятие многообразия. Векторные поля и формы на многообразиях. Внешнее умножение и внешний дифференциал форм. Интегрирование дифференциальных форм. Общая теорема Стокса и следствия из нее.

2. Комплексный анализ

Функции комплексного переменного. Понятие C -дифференцируемости и R -дифференцируемости. Условия Коши-Римана. Эквивалентность понятий аналитичности и голоморфности для функций одного комплексного переменного.

Геометрический смысл аргумента и модуля производной. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования. Стереографическая проекция.

Интегральная теорема Коши (об интеграле по замкнутому контуру) и теорема Мореры. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Аналитическое продолжение.

Область сходимости степенного ряда. Радиус сходимости. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда внутри круга сходимости.

Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса. Теорема Коши о вычетах.

Теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций. Аналитическое продолжение. Полная аналитическая функция. Ветви аналитической функции, теорема о монодромии. Точки ветвления. Риманова поверхность полной аналитической функции.

Конформные отображения. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Принцип аргумента и теорема Руше. Принцип симметрии Римана-Шварца. Теорема Римана. Простые концы и строение границы плоской области. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

3. Функциональный анализ

Метрические и топологические пространства. Полнота и пополнение метрических пространств. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах. Равностепенная непрерывность семейства функций. Теорема Арцела-Асколи. Сепарабельность.

Банаховы пространства. Три принципа линейного анализа (теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха об обратном операторе).

Нормированные и топологические линейные пространства. Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый

дифференциалы.

Слабая сходимость. Теорема о слабой компактности шара в гильбертовом пространстве.

Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах. Компактные операторы.

Спектр оператора. Простейшие свойства спектра. Теорема Гильберта-Шмидта о компактных самосопряженных операторах.

4. Требования к реферату по специальной дисциплине

Реферат по специальной дисциплине должен показать исследовательский потенциал абитуриента, его подготовленность к выполнению научно-исследовательской программы аспирантуры.

Объем реферата не должен превышать 10 страниц машинописного текста через 1,5 интервала, шрифт Times New Roman, номер 14; размеры полей: верхнее и нижнее - 2 см, левое - 3 см, правое - 1,0 см, выравнивание по ширине.

Реферат должен содержать краткий обзор литературы (состояние вопроса) по предмету исследования, формулировку и обоснование проблемы: ее актуальность, фундаментальные и прикладные аспекты, степень разработанности.

В текст реферата могут быть включены схемы, таблицы, рисунки, приложения.

Структура реферата:

- титульный лист (см. Приложение);
- введение (актуальность, цель, задачи, методы исследования);
- проблемы исследования, ожидаемые результаты;
- заключение (выводы);
- список литературы;
- список опубликованных и направленных в печать статей, и материалов (при наличии).

В реферате автор должен показать знание текущего состояния исследований в выбранной научной области, умение анализировать литературные источники, делать выводы о перспективах предполагаемого исследования.

5. Описание шкал оценивания

Экзамен по специальной дисциплине оценивается по 5-балльной шкале.

Собеседование по тематике предполагаемого диссертационного исследования на основе подготовленного поступающим реферата оценивается по 5-балльной шкале.

Минимальное количество баллов, подтверждающее успешное прохождение каждой части вступительного испытания, устанавливается равным 3 баллам. Результирующая оценка за вступительное испытание по специальной дисциплине складывается из оценки за экзамен по специальной дисциплине и оценки за собеседование по тематике предполагаемого

диссертационного исследования на основе подготовленного поступающим реферата. Максимальное количество баллов по специальной дисциплине равно 10 баллам.

Шкала оценивания экзамена по специальной дисциплине

Оценка / Баллы	Уровень подготовленности, характеризуемый оценкой
1	Нет ответа.
2	Нет понимания предмета.
3	Ответ с грубыми ошибками, имеются неточности, знания несистематические. Отсутствие правильной формулировки ответа на вопрос даже с помощью преподавателя.
4	В целом положительный ответ с незначительными ошибками. Умение с помощью преподавателя схематично, но правильно сформулировать ответ на поставленный вопрос.
5	Полный развернутый ответ, демонстрирующий системные знания, умение сопоставить теоретические знания, свободное владение информацией из нескольких источников основной и дополнительной литературы.

Шкала оценивания собеседования на основе реферата

Оценка / Баллы	Уровень подготовленности, характеризуемый оценкой
1	Содержание не соответствует теме реферата, материал не систематизирован и не структурирован, основные понятия проблемы не раскрыты; в постановке проблемы нет самостоятельности; в формулировании нового аспекта выбранной для анализа проблемы не продемонстрировано умение обобщать, сопоставлять различные точки зрения по рассматриваемому вопросу, аргументировать основные положения и выводы; отсутствует культура изложения и оформления текста реферата
2	Содержание не соответствует теме реферата, материал плохо систематизирован и структурирован, основные понятия проблемы не раскрыты; в постановке проблемы нет самостоятельности; в формулировании нового аспекта выбранной для анализа проблемы не продемонстрировано умение обобщать, сопоставлять различные точки зрения по рассматриваемому вопросу, аргументировать основные положения и выводы; отсутствует культура изложения и оформления текста реферата
3	Содержание соответствует теме реферата, но основные понятия проблемы не раскрыты; в формулировании нового аспекта выбранной для анализа проблемы не продемонстрировано умение обобщать, нет ссылок на литературу; отсутствует культура изложения и оформления текста реферата

4	Содержание соответствует теме реферата, материал систематизирован и структурирован, основные понятия проблемы раскрыты; в постановке проблемы присутствует новизна; правильно оформлены ссылки на литературу; продемонстрирована культура изложения и оформления текста реферата
5	Содержание соответствует теме реферата, материал систематизирован и структурирован, основные понятия проблемы раскрыты полностью и глубоко; в постановке проблемы присутствует новизна и самостоятельность; в формулировании нового аспекта выбранной для анализа проблемы продемонстрировано умение обобщать, сопоставлять различные точки зрения по рассматриваемому вопросу, аргументировать основные положения и выводы; продемонстрирована культура изложения и оформления текста реферата

3. Источники для подготовки к экзамену

а) основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2009, 572 с. ISBN: 978-5-9221-0266-7 <https://e.lanbook.com/book/2206>
2. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. 6-е изд., 2010. 336 с. ISBN 978-5-9221-0133-2 (и другие издания) <https://e.lanbook.com/book/48167>
3. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. 16-е изд., стер. Издательство "Лань", 2022, 440 с. ISBN 978-5-8114-9392-0 (<https://e.lanbook.com/book/193364> и другие издания)
4. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. В 2-х ч. Ч.1: Функции одного переменного. Ч.1. 5-е изд., 2015, 336 с. ISBN 978-5-9710-1358-7 (и другие издания)
5. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. В 2-х ч. Ч.2: Функции нескольких переменных. Ч.2. 5-е изд., 2015, 464 с. ISBN 978-5-9710-1357-0 (и другие издания)
6. Зорич В.А. Математический анализ. Т. 1,2. М.: МЦНМО, 2012. ISBN: 978-5-94057-891-8. <https://e.lanbook.com/book/9343>
7. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа 1,2,3 том. М.: Юрайт, 2014. <https://e.lanbook.com/book/2224> <https://e.lanbook.com/book/2225> <https://e.lanbook.com/book/2226>
8. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Москва-Ижевск, РХД, 2009.

б) дополнительная литература:

1. Никольский С.М. Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2001, 592 стр. ISBN: 978-5-9221-0/60-8. <https://e.lanbook.com/book/2270>
2. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1967-1968.

3. Натансон ИЛ. Теория функций вещественной переменной. СПб.: Издательство "Лань", 2008. 560 с. ISBN: 978-5-8114-0136-9 <https://e.lanbook.com/book/189430>
4. Ильин А.М. Уравнения математической физики. М.: Издательство "Физматлит". 2009, 162 с. ISBN: 978-5-9221-1036-5 <https://e.lanbook.com/book/2181>
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. I. Функциональный анализ. М.: Мир, 1976.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. У. М.: Физматгиз, 1959.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. 5-е изд, М.: Наука, 1985.
8. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
10. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
11. Белинский ПЛ. Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука (сиб. отд.), 1974.
12. Дженкинс Дж. Однолистные функции и конформные отображения. М.: ИЛ, 1962.
13. Дьяченко М.И., Ульянов ПЛ. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.
14. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991.
15. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
16. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
17. Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Высшая школа, 1999.
18. Федоров В.М. Курс функционального анализа. СПб.: Лань, 2005.

в) интернет - ресурсы:

Электронно-библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com/>

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кубанский государственный университет»

Реферат
по специальной дисциплине
1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ
(шифр и наименование научной специальности)

Тема: _____

Выполнил: _____ Ф.И.О.

Краснодар
2022