

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования «Кубанский
государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ



Проректор по научной работе
и инновациям, профессор

М.Г. Барышев

03 2018 г

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

для подготовки аспирантов

Специальность

01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Форма обучения

Очная, заочная

Краснодар

2018

Программа составлена в соответствии с утвержденными ФГТ и рекомендациями по формированию основных профессиональных образовательных программ послевузовского профессионального образования.

Автор: Лазарев В.А. Лазарев, д. п. н., профессор

Рабочая программа вступительного экзамена утверждена на заседании кафедры теории функций «10» 03 2018 г., протокол № 5

Зав. кафедрой теории функций: Лазарев В.А. Лазарев

Декан факультета математики и компьютерных наук Грушевский С.П. Грушевский

Зав. отделом аспирантуры: Строганова Е.В. Строганова

1. Требования к уровню подготовки, необходимому для освоения основной образовательной программы 01.06.01 Математика и механика

1.1. Цель вступительного экзамена: подтверждение соответствия подготовки абитуриентов требованиям, изложенным во ФГОС ВО по направлению подготовки магистров по направлению 01.04.01 Математика по дисциплинам базовой части профессионального блока

1.2. Компетенции выпускника, проверяемые в ходе экзамена по направлению подготовки магистров 01.04.01 Математика:

Шифр компетенции	Формулировка компетенции
Общепрофессиональные (ОПК) компетенции, определенные ФГОС ВО	
ОПК-1	способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий
Профессиональные (ПК) компетенции, определенные ФГОС ВО	
ПК-1	способность к системному мышлению и грамотному использованию основных принципов, концепций и методов вещественного, комплексного и функционального анализа
ПК-2	готовность к постановке профессиональных задач в области научно-исследовательской и практической деятельности, подбору, развитию и совершенствованию методов их решения на базе современных достижений в области вещественного, комплексного и функционального анализа
Универсальные (УК) компетенции, определенные ФГОС ВО	
УК-1	способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях
УК-5	способность планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития

2. Критерии оценки ответов на вступительном экзамене.

Вступительный экзамен проводится в форме устного ответа. Билет состоит из двух вопросов. В процессе сдачи экзамена абитуриенты должны продемонстрировать: знание теоретического материала, умение грамотно оперировать специальной терминологией, логично излагать свою точку зрения по соответствующему вопросу.

Итоговая оценка зависит от знания и подробности изложения материала.

Ответ оценивается по пятибальной шкале.

Критерии оценивания	Количество баллов
Полный ответ на поставленный вопрос, четко сформулированный квалифицированный ответ, грамотно и логически стройно изложенный, в свете которого тесно увязывается теория с практикой. Проявлена повышенная научная и образовательнокультурная эрудиция.	5
Ответ грамотный, логично изложенный, существенные неточности отсутствуют. Проявлена достаточная научная и образовательнокультурная эрудиция.	4
Знания только основного материала, без деталей, допускаются неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения последовательности в изложении. Проявлена ограниченная научная и образовательнокультурная подготовленность.	3
В ответе значительные пробелы в фундаментальных знаниях, допускаются существенные ошибки.	2

3. Структура и содержание материала, выносимого на вступительные испытания.

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: математический анализ; теория функций комплексного переменного (комплексный анализ); функциональный анализ, а также программы соответствующих курсов лекций, читаемых на механико-математических, математико-механических и физико-математических факультетах университетов.

3.1. Вещественный анализ

Понятие метрического пространства, полные метрические пространства, компактность. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Критерий компактности в \mathbf{R}^n . Полнота \mathbf{R}^n .

Понятие непрерывности функций, их свойства. Равномерная непрерывность. Свойства непрерывных функций на компактах.

Непрерывность и дифференцируемость функции нескольких переменных. Полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости.

Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.

Локальный экстремум функции многих переменных. Достаточное условие. Условный экстремум функции многих переменных. Необходимое условие. Метод множителей Лагранжа.

Криволинейные интегралы первого и второго рода, формула Грина. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Формула Гаусса-Остроградского. Формула Стокса в трехмерном пространстве.

Ортогональные системы функций. Неравенство Бесселя, условие полноты. Ряды Фурье. Достаточные условия сходимости рядов Фурье. Полнота тригонометрической системы в пространстве непрерывных функций, периодических на отрезке $[0, 2\pi]$.

Мера в смысле Лебега. Измеримые функции и их свойства. Интеграл Лебега и его основные свойства. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана.

Функциональные последовательности (ряды). Поточечная и равномерная сходимости, примеры. Свойства предельной функции (суммы ряда), ее интегрируемость и дифференцируемость.

Понятие многообразия. Векторные поля и формы на многообразиях. Внешнее умножение и внешний дифференциал форм. Интегрирование дифференциальных форм. Общая теорема Стокса и следствия из нее.

3.2. Комплексный анализ

Функции комплексного переменного. Понятие C -дифференцируемости и R -дифференцируемости. Условия Коши-Римана. Эквивалентность понятий

аналитичности и голоморфности для функций одного комплексного переменного.

Геометрический смысл аргумента и модуля производной. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования. Стереографическая проекция.

Интегральная теорема Коши (об интеграле по замкнутому контуру) и теорема Мореры. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Аналитическое продолжение.

Область сходимости степенного ряда. Радиус сходимости. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда внутри круга сходимости.

Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса. Теорема Коши о вычетах.

Теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций. Аналитическое продолжение. Полная аналитическая функция. Ветви аналитической функции, теорема о монодромии. Точки ветвления. Риманова поверхность полной аналитической функции.

Конформные отображения. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолиственности. Принцип аргумента и теорема Руше. Принцип симметрии Римана-Шварца. Теорема Римана. Простые концы и строение границы плоской области. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

3.3. Функциональный анализ

Метрические и топологические пространства. Полнота и пополнение метрических пространств. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах. Равностепенная непрерывность семейства функций. Теорема Арцела-Асколи. Сепарабельность.

Банаховы пространства. Три принципа линейного анализа (теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха об обратном операторе).

Нормированные и топологические линейные пространства. Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы.

Слабая сходимость. Теорема о слабой компактности шара в гильбертовом пространстве.

Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах. Компактные операторы.

Спектр оператора. Простейшие свойства спектра. Теорема Гильберта-Шмидта о компактных самосопряженных операторах.

4. Рекомендуемая литература.

4.1. Основная литература.

- Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2009, 572 стр. ISBN: 978-5-9221-0266-7
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206
- Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. Изд.6, стер.2010. Твердый переплет. 336 с. ISBN 978-5-9221-0133-2 (и другие издания)
- Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Изд.16. 2015. 440 с. Мягкая обложка. ISBN 978-5-9710-1399-0; Твердый переплет. ISBN 978-5-9710-1423-2. (и другие издания)
- Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. В 2-х ч. Ч.1: Функции одного переменного. Ч.1. Изд.5, 2015. Твердый переплет. 336 с. ISBN 978-5-9710-1358-7 (и другие издания)
- Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. В 2-х ч. Ч.2: Функции нескольких переменных. Ч.2. Изд.5, 2015. Твердый переплет. 464 с. ISBN 978-5-9710-1357-0 (и другие издания)
- Зорич В.А. Математический анализ. Т. 1,2. М.: МЦНМО, 2012. ISBN: 978-5-94057-891-8.
- Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа 1,2,3 том. М.:Юрайт, 2014.
- Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Москва-Ижевск, РХД, 2009.

4.2. Дополнительная литература.

- Никольский С.М. Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2001, 592 стр. ISBN: 978-5-9221-0160-8. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2270
- Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1967—1968.
- Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. СПб.: Лань, 2008. 560 стр. ISBN: 978-5-8114-0136-9 http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=284
- Ильин А.М. Уравнения математической физики. М.: Физматлит. 2009, 162 стр. ISBN: 978-5-9221-1036-5 http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2181
- Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1976.
- Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. V. М.: Физматгиз, 1959.
- Владимиров В.С. Уравнения математической физики. 5-е изд. М.: Наука, 1985.
- Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
- Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
- Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.:Мир, 1969.
- Белинский П.П. Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука (сиб. отд.), 1974.
- Дженкинс Дж. Однолистные функции и конформные отображения . М.:ИЛ, 1962.
- Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.
- Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991.
- Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
- Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
- Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Высш. школа, 1999.
- Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.
- Федоров В.М. Курс функционального анализа. СПб.: Лань, 2005.