

ОТЗЫВ

официального оппонента

на диссертационную работу Ханазаряна Артура Дерениковича
«МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В
УПРУГИХ МЕТАМАТЕРИАЛАХ И СЛОИСТЫХ ВОЛНОВОДАХ С
ПРИСОЕДИНЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ»,

представленную на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

по специальности

1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела

Создание неоднородных структур, метаматериалов обусловлено выигрышем в характеристиках, наличием у последних новых свойств. Для эффективного развития области требуется совершенствование аппарата по моделированию таких структур и их неразрушающему контролю. Акустический мониторинг является одним из возможных способов диагностики конструкций при помощи волновых полей. Построение точных математических моделей позволит осуществлять изучение свойств конструкций экспериментальным путем, что приближает к решению задачи о производстве материалов с заданными свойствами. Локальная неоднородность изучаемых протяженных конструкций требует развития гибридных вычислительных схем, объединяющих преимущества метода конечных элементов при описании сложной геометрической неоднородности с преимуществами полуаналитического представления решения, которое строится в протяженной области. Развиваемые методы расчета волновых полей в периодических структурах с полостями и протяженных структурах с присоединенными элементами свидетельствуют об **актуальности** диссертационной работы.

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Во **введении** представлен обзор основных работ по теме диссертационного исследования, описаны области применения метаматериалов, проблемы акустического мониторинга, методы и подходы, используемые для построения решений, осуществлен анализ их преимуществ и недостатков.

В **первой** главе приводятся постановки задач о колебаниях электроупругих, анизотропных и изотропных упругих тел. Вводятся основные обозначения. Рассматривается система уравнений в частных производных, описывающая плоское деформированное состояние и уравнение Гельмгольца, которое описывает антиплоские колебания. Приводятся слабые постановки для плоской и антиплоской задач. Применяется теория Флоке-Ляпунова для описания распространения волн в метаматериалах. Рассмотрены случаи пакета слоев между двумя полуплоскостями и волновода с периодической ячейкой. Приводятся примеры элементарной ячейки.

Во **второй** главе описывается метод матриц переноса применительно к волноводу из бесконечного числа повторяющихся ячеек. Описывается МКЭ высокого порядка точности (ВПТ), в котором для аппроксимации решения применяются полиномы более высоких степеней, чем в классическом МКЭ. Описываются базисные функции, применяемые для аппроксимации решения в проекционном методе, приводится матричный вид дисперсионного уравнения. Описываются метод спектральных элементов (МСЭ, он же МКЭ ВПТ) и полуаналитический МКЭ (ПАМКЭ) применительно к задаче об антиплоских колебаниях двухсоставной области. Эти же методы расширены для решения задачи о плоских колебаниях двухсоставной области. Плоская задача рассмотрена в двух постановках: задаются амплитуды перемещений на части границы или колебания возбуждаются заданной равномерно распределенной нагрузкой. Описывается интегральный подход (ИП) с введением матрицы Грина. Сравниваются полученные в рамках ИП графики

медленностей с графиками, полученными при помощи ПАМКЭ. Изучено минимальное количество узлов, которое необходимо для получения вещественных дисперсионных точек по методу ПАМКЭ с необходимой точностью в зависимости от частоты колебаний.

В **третьей** главе описывается согласование МКЭ ВПТ и ПАМКЭ в единую гибридную вычислительную схему. Для обеспечения выполнения граничных условий на торцах и условий сопряжения между областями предлагается использовать проекционные методы Галеркина и коллокаций. Рассматриваемые задачи сводятся к системам матричных уравнений. Рассмотрены случаи антиплоской задачи и плоской задачи двух типов. Для упругого волновода с присоединенным элементом описывается вычисление коэффициента трансформации энергии падающей волны. Для материалов с периодической структурой также описывается «сшивка» решений, применяются проекционные методы, формируются матричные уравнения.

В **четвертой** главе приводятся результаты экспериментов и численного моделирования. Рассмотрено распространение волн в слоистых материалах из эластомеров: построены дисперсионные кривые для различных углов падения плоской волны, изучена зависимость фактора локализации и смещения запрещенных зон от степени удлинения. Для протяженного тела с присоединенным элементом проведена серия вычислительных экспериментов по построению волновых полей в рамках двух проекционных методов и сравнение результатов с МКЭ пакетом COMSOL. Для антиплоской и плоской задачи двух типов построены поля перемещений и компоненты тензора напряжений, вычислены погрешности по отношению к МКЭ решению. Описано изготовление экспериментальных образцов с разрезами и без них при помощи 3D-принтера и методика проведения эксперимента для материала с двуслойной ячейкой и межслойными полостями. Для измеренного сигнала выполняется преобразование Фурье и вычисляется коэффициент прохождения. Затем выполняется его сравнение с

предсказанным теоретически. Для пластины с массивом полостей также выполнено теоретическое и экспериментальное исследование коэффициента прохождения. Приведены графики характеристик медленности и затухания. Осуществлено варьирование параметров полостей для достижения наиболее широкой запрещенной зоны. Сообщается о достижении диапазона в 14кГц в результате численного моделирования и при этом экспериментальная оценка дала более широкий диапазон в 18кГц.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационного исследования.

Научная новизна работы заключается в разработке методов расчета распространения волн в протяженных телах с присоединенными элементами, а также в упругих метаматериалах (материалах с периодической структурой). Выполнено развитие гибридного подхода, который использует полуаналитическое представление решения в протяженных областях и метод конечных элементов высокого порядка точности в конечной присоединенной области. На основе периодических граничных условий теории Флоке-Ляпунова составлено дисперсионное уравнение для волн Флоке-Блоха. Выполнено сравнение вещественных частей дисперсионного множества, полученных в рамках разработанного подхода с полученными в рамках интегрального подхода. Выполнено экспериментальное исследование, которое позволило провести верификацию разработанных математических и компьютерных моделей, изучить влияние параметров структуры метаматериала на формирование запрещенных зон.

Среди новых результатов, полученных автором диссертации, можно отметить следующие **наиболее значимые результаты**:

1. Реализована гибридная схема, совмещающая МКЭ высокого порядка точности и полуаналитический МКЭ.
2. Изучено распространение волн в волноводах с периодической структурой.

3. Проведена серия вычислительных экспериментов для верификации разработанных схем.
4. Экспериментально и теоретически исследовано формирование запрещенных зон в метаматериалах.

Практическая значимость результатов диссертационного исследования состоит в следующем:

1. Разработанный математический аппарат и соответствующая ему программная реализация служат базой для проведения численных и экспериментальных исследований явления возникновения запрещенных зон в фоновых кристаллах и метаматериалах.
2. Для образцов из упругого слоистого материала с полостями и без них выполнены экспериментальные исследования коэффициента прохождения, позволяющие осуществить верификацию предлагаемых математических и компьютерных моделей.

При выполнении диссертационного исследования автором были применены различные численные и аналитические **методы исследования**. Рассмотрены вариационные постановки задач о плоских и антиплоских колебаниях. Решение задачи для конечного объекта с присоединенным элементом строится при помощи гибридной схемы, совмещающей МКЭ ВПТ и ПАМКЭ. Решение ПАМКЭ в протяженной области строится в виде разложения, в котором используется информация о нулях дисперсионного уравнения для порождающего бесконечного волновода. В конечной области произвольной формы решение строится на основе МКЭ ВПТ в виде разложения по интерполяционным полиномам на узлах Гаусса-Лежандра-Лобатто. Для удовлетворения граничным условиям на торцах и при сопряжении решений МКЭ ВПТ и ПАМКЭ используются проекционные методы Галеркина или коллокаций. Для описания волн в периодических структурах используется теория Флоке-Ляпунова. При помощи аддитивных

технологий изготовлены образцы из пластика для проведения экспериментальных исследований.

Полученные в ходе выполнения диссертационной работы результаты являются оригинальными и **обоснованными**.

Достоверность полученных автором результатов обусловлена строгой постановкой задач, применением известных апробированных методов, сравнением результатов работы с результатами, полученными экспериментально и на основе других известных подходов.

По диссертационной работе Ханазаряна А. Д. имеются следующие **замечания**:

1. Автор применяет преобразование Фурье для конечной области (слабая постановка на стр. 37), при этом отсутствуют внеинтегральные слагаемые, порожденные границами рассматриваемой прямоугольной области.

2. В работе отсутствует сравнение комплексных ветвей дисперсионного множества, полученных по методу ПАМКЭ с ветвями, получаемыми путем решения дисперсионного уравнения, которое может быть в явном виде записано для однородной полосы.

3. Неясна необходимость сортировки получающихся собственных значений и отслеживания волн, распространяющихся слева-направо и справа-налево при том, что область является конечной.

4. Не приводятся примеров, которые бы продемонстрировали структуру используемых интерполяционных полиномов с узлами Гаусса-Лежандра-Лобатто.

5. Введена функция перемещений для «сшивки» в (2.19). Значит ли это, что условие непрерывности перемещений в (2.18) выполнено автоматически, а сопряжение по напряжениям еще нужно обеспечить дополнительно?

6. Из текста работы и вычислительных экспериментов неясно, с какой погрешностью удовлетворяются граничные условия: на левом и правом торцах, а также условия стыковки на интерфейсе между ПАМКЭ и МСЭ областями.

7. Кроме того, имеется ряд технических замечаний:

а) на стр. 18 говорится о скачке напряжений, неясно, какие компоненты тензора напряжений имеются в виду.

б) в операторе для уравнения Ламе после (1.13) имеется опечатка. Множитель $\lambda + 2\mu$ перед градиентом дивергенции вектора перемещений в действительности равен $\lambda + \mu$.

в) на стр. 21 имеется несогласованность; сначала написано, что решение не зависит от x_2 , а ниже, что $u_j = u_j(x_1, x_2)$.

г) индекс i в (1.15) на стр. 22 (в последнем интегральном слагаемом) должен быть $i = 1, 2$.

Отмечу, что сделанные замечания не снижают научной ценности диссертации Ханазаряна А. Д., которая является законченным научным исследованием и вносит вклад в развитие вычислительных схем для расчета волновых полей для исследуемых в работе структур.

Автореферат диссертации правильно и полно отражает основное содержание работы.

Основные результаты по теме диссертационного исследования отражены в 12 работах, из которых 3 статьи опубликовано в рецензируемых изданиях из списка ВАК, 3 статьи опубликовано в изданиях, индексируемых в Web of Science или Scopus и 6 работ – в сборниках материалов и трудов конференций.

Заключение. Учитывая вышеизложенное, считаю, что диссертационная работа Ханазаряна Артура Дерениковича на тему «Моделирование и

